1.3 Lemme de Zorn-Axiome de choix

Définition(Relation d'ordre) : Soit $\mathbf{E}$ un ensemble, une relation binaire $\Re$ dans $\mathbf{E}$ est une relation d'ordre si elle vérifie les conditions suivantes :
1) Réflexive, c'est à dire $\forall x \in \mathbf{E}$ on a $x\Re x$.
2) Antisymétrique : $\forall x, y \in \mathbf{E}$ on a $x\Re y$ et $y\Re x \Longrightarrow x = y$.
3) Transitive : $\forall x, y, z \in \mathbf{E}$ on a $x\Re y$ et $y\Re z \Longrightarrow x\Re z$.

On dit que $\Re$ définit un ordre total sur $\mathbf{E}$ si $\forall x, y \in \mathbf{E}$ on a :
$x\Re y$ ou $y\Re x$.

Définition : • $\subset$ est une relation d'ordre sur l'ensemble des parties d'un ensemble $\mathbf{X}$.
• $\leq$ est un ordre total sur $\mathbb{N}$.

Définition 1.9(Ensemble Maximal) : Soit $\mathbf{E}$ un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$, et soit $\mathbf{A}$ une partie de $\mathbf{E}$.
i) On dit que $m(resp : M)$ élément de $\mathbf{E}$ est un minorant (resp : est un majorant) de $\mathbf{A}$ si : $\forall x \in \mathbf{A},\ m \leq x\ (resp : x \leq M)$.
ii) On dit que $m \in \mathbf{A}$ est un élément minimal (resp : Maximal) de $\mathbf{A}$ si $\forall x \in \mathbf{A},\ m \leq x$ $(resp : x \leq m)$.

Définition 1.10 : Ensemble inductif Un ensemble ordonnée $(\mathbf{E}, \Re)$ est dit inductif si et seulement si toute partie non vide $\mathbf{P}$ de $\mathbf{E}$ totalement ordonnée admet un majorant dans $\mathbf{E}$.

Corollaire : si $\mathbf{E}$ est fini alors $(\mathbf{E}, \leq)$ est toujours inductif.

Axiome de choix : Soient $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{F}$ deux ensembles quelconques, pour tout application $\varphi : \mathbf{E} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{F})$ telle que $\forall x \in \mathbf{E}\ \varphi(x) \neq \varnothing$, il existe une application $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ telle que $f(x) \in \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbf{E}$.

L'axiome du choix est équivalent au lemme de Zorn.

Théorème (Lemme de Zorn) : Tout ensemble, non vide, ordonné, inductif admet au moins un élément maximal.

1.4 l'existence de la base en dimension infinie

Théorème 1.2 : Tout espace vectoriel de dimension infinie admet une base.
La démonstration de ce théorème est basé sur le lemme de Zorn.

Preuve :
Soit $\mathbf{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie, et $\mathbf{L}$ une partie libre de $\mathbf{E}$.

1) On pose l'ensemble $\mathcal{A} = \{\mathbf{H} \subset \mathbf{E} \ / \ \mathbf{H} \text{ libre et } \mathbf{L} \subset \mathbf{H}\}$. Montrons que $\mathcal{A}$ admet un élément maximal, en effet :

- $\mathcal{A} \neq \emptyset$ car $\mathbf{L} \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ muni de la relation d'ordre $\subseteq$ est un ensemble ordonnée.
- D'après le lemme de Zorn il reste à montrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ est inductif.

Soit $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$ une partie de $\mathcal{A}$ totalement ordonnée, on pose $\mathbf{M} = \bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i$. On a :
$\mathbf{L} \subset \mathbf{A}_i \ (\forall i \in I)$, alors $\mathbf{L} \subset \mathbf{M}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\{e_1, ..., e_n\}$ une famille d'élément de $\mathbf{M}$, alors $\exists \mathbf{A}_{i_1}, ..., \mathbf{A}_{i_n}$ tel que $e_j \in \mathbf{A}_{i_j}$ pour tout $j \in \{1, 2, ..., n\}$, et puisque $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$ est totalement ordonné, on peut supposer qu'on a : $\mathbf{A}_{i_1} \subset .... \subset \mathbf{A}_{i_n}$. Donc $e_j \in \mathbf{A}_{i_n}$ $(1 \leq j \leq n)$, comme $\mathbf{A}_{i_n}$ est libre, on a : $\{e_1, ..., e_n\}$ est libre $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc $\mathbf{M}$ est libre et par conséquent $\mathbf{M} \in \mathcal{A}$. Or $\forall i \in I$ $\mathbf{A}_i \subset \mathbf{M}$, d'où $\mathbf{M}$ est un majorant de $\{A_i\}_{i\in I}$ alors d'après le lemme de Zorn $\mathcal{A}$ admet un élément maximal, qu'on note par $\mathbf{B}$.

2) On a : $\mathbf{B} \in \mathcal{A} \Longrightarrow \mathbf{B}$ libre et $\mathbf{L} \subset \mathbf{B}$. Alors pour que $\mathbf{B}$ soit une base de $\mathbf{E}$, il suffit que $\mathbf{B}$ soit génératrice de $\mathbf{E}$.
Supposons que $\mathbf{B}$ n'est pas génératrice de $\mathbf{E}$, alors $\exists x \in \mathbf{E}$ tel que x n'appartient pas à $Vect(\mathbf{B})$, donc $\mathbf{B} \cup \{x\}$ est une famille libre, de plus $\mathbf{L} \subset \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{L} \subset \mathbf{B} \cup \{x\}$, donc $\mathbf{B} \cup \{x\} \in \mathcal{A}$, Or $\mathbf{B} \subsetneq \mathbf{B} \cup \{x\}$, alors on conclu que $\mathbf{B}$ n'est pas maximal, contradiction. D'où $\mathbf{B}$ est génératrice de $\mathbf{E}$. Et par conséquent $\mathbf{B}$ est une base de $\mathbf{E}$.

Remarque :
Si $\mathbf{E}$ de dimension fini, alors $\mathbf{E}$ admet une base.

Exemple :
$\mathbf{E} = \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ l'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, il est de dimension infinie et admet comme base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, ..., X^n, ...\}$.

$\mathcal{B}$ s'appelle la base canonique de $\mathbf{E}$.

1.5 Applications linéaire

Soient (E,+,·) et (F,+,·) deux $\mathbb{K}$-e.v .

Définition 1.11 : Une application f :E$\longrightarrow$F est dite linéaire, si :

1. $\forall x, y \in E$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in K$, $f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x)$

Si de plus f est bijective, on dit que f est isomorphisme.

Un endomorphisme(resp. un automorphisme) de E est une application linéaire(resp. un isomorphisme) de E dans E.