Devoir 3 sur le chapitre 5
Préparé par : Pr. A. Zekhnini

Exercice 1
Soit L/K une extension galoisienne de corps de nombres de degré fini n et de groupe de Galois G. Notons par $\mathcal{O}_K$ et $\mathcal{O}_L$ les anneaux d'entiers de K et L respectivement. Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_K$ et $\mathfrak{P}$ un idéal de $\mathcal{O}_L$ au dessus de $\mathfrak{p}$.

1. Montrer que $\mathcal{O}_L$ est stable par G et que $\mathcal{O}_L^G = \mathcal{O}_K$.
2. i. Montrer que $\forall \sigma \in G$, $\sigma(\mathfrak{P})$ est aussi au dessus de $\mathfrak{p}$.
   ii. Montrer que G agit transitivement sur $E_{\mathfrak{p}}$, l'ensemble des premiers de L au dessus de $\mathfrak{p}$.
   iii. Soit $\sigma \in G$, considérons l'application : $\overline{\sigma} : \dfrac{\mathcal{O}_L}{\mathfrak{P}} \longrightarrow \dfrac{\mathcal{O}_L}{\sigma(\mathfrak{P})}$; $x\mathfrak{P} \longmapsto \sigma(x)\sigma(\mathfrak{P})$. Montrer que $\overline{\sigma}$ est un isomorphisme de $K_{\mathfrak{p}}$-espace vectoriels, où $K_{\mathfrak{p}} = \dfrac{\mathcal{O}_K}{\mathfrak{p}}$.
3. Notons par $D_{\mathfrak{P}}$ le stabilisateur de $\mathfrak{P}$ sous l'action de G.
   i. Montrer que $D_{\mathfrak{P}}$ est un sous-groupe de G, $D_{\mathfrak{P}}$ est dit le groupe de décomposition de $\mathfrak{P}$.
   ii. Déduire de la question 2iii que $\overline{\sigma}$ est un automorphisme de $\frac{\mathcal{O}_L}{\mathfrak{P}}$, et que pour tout $\overline{a} \in \frac{\mathcal{O}_K}{\mathfrak{p}}$, $\overline{\sigma}(\overline{a}) = \overline{a}$.
   iii. Montrer que $\forall \sigma \in G$, $D_{\sigma(\mathfrak{P})} = \sigma D_{\mathfrak{P}} \sigma^{-1}$.
   iv. Montrer que $\frac{|G|}{|D_{\mathfrak{P}}|} = g$ et par suite $|D_{\mathfrak{P}}| = ef$, où $g = card(E_{\mathfrak{p}})$ et e, f l'indice de ramification et le degré résiduel de $\mathfrak{P}$ respectivement.
   v. Déduire que $\mathfrak{p}$ se décompose complètement ssi $D_{\mathfrak{P}} = \{1\}$.
4. Posons $K_{\mathfrak{p}} = \frac{\mathcal{O}_K}{\mathfrak{p}}$ et $L_{\mathfrak{P}} = \frac{\mathcal{O}_L}{\mathfrak{P}}$.
   i. Montrer que $L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}$ est une extension galoisienne.
   ii. Considérons l'application $\varphi_{\mathfrak{P}} : \ D_{\mathfrak{P}} \longrightarrow \mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}})$; $\sigma \longmapsto \overline{\sigma}$. Montrer que $\varphi_{\mathfrak{P}}$ est un morphisme surjectif.
   iii. Montrer que $\mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}})$ est un groupe cyclique d'ordre f. Décrire un de ses générateurs.
   iv. Caractériser $I_{\mathfrak{P}}$ le noyau de $\varphi_{\mathfrak{P}}$; $I_{\mathfrak{P}}$ est dit le groupe d'inertie de $\mathfrak{P}$.
   v. a. Montrer que $\forall \sigma \in G$, $I_{\sigma(\mathfrak{P})} = \sigma I_{\mathfrak{P}} \sigma^{-1}$.
      b. Montrer que $|I_{\sigma(\mathfrak{P})}| = e$.
      c. Déduire que :
         - $\mathfrak{P}$ est non ramifié ssi $I_{\mathfrak{P}} = \{1\}$.
         - $\mathfrak{P}$ est ramifié ssi $I_{\mathfrak{P}} = Gal(L/K)$.
5. Soient K_D (resp. K_I) le sous-corps de L fixe par $D_{\mathfrak{P}}$ (resp. $I_{\mathfrak{P}}$). Posons $Q_{K_D} = \mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_{K_D}$ et $Q_{K_I} = \mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_{K_I}$.
   i. Montrer que l'injection $g : \dfrac{\mathcal{O}_K}{\mathfrak{p}} \longrightarrow \dfrac{\mathcal{O}_{K_D}}{Q_{K_D}}$ est un isomorphisme.
   ii. Montrer que $\mathrm{Gal}(K_I/K_D) \simeq D_{\mathfrak{P}}/I_{\mathfrak{P}} \simeq \mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}})$.

Exercice 2
Soit L/K une extension cyclique de corps de nombres de groupe de Galois $G = \langle \sigma \rangle$. Notons par $\mathcal{O}_K$ et $\mathcal{O}_L$ les anneaux d'entiers de K et L respectivement. Soit $\mathfrak{m}$ un module de K. Pour les notations utilisés dans ce qui suit, voir le chapitre 5.

1. Considérons le groupe $\mathrm{C}^{\mathfrak{m}} = \dfrac{\mathbf{I}_L^{\mathfrak{m}}}{N(\mathbf{I}_L^{\mathfrak{m}})i(K_{\mathfrak{m},1})}$. Montrer que $\mathrm{C}^{\mathfrak{m}}$ est fini.
2. Sur quoi est basé la preuve de la première inégalité.

3. Soit f_0 le morphisme associé à $f = f_{\mathfrak{m}}$ par le lemme de l'hexagone exact. Calculer $f_0(a)$ dans les cas où $a \in K_{\mathfrak{m}}$ et $a \in K_{\mathfrak{m},1}$. Justifier les résultats trouvés.

4. Dire pourquoi la suite suivante est exacte :

$$1 \longrightarrow L^S \longrightarrow L^* \xrightarrow{f} \mathbf{I}_L^{\mathfrak{m}} \longrightarrow coker(f) \longrightarrow 1.$$

5. Calculer les noyaux de d_2 et $d_3 f_0$, et déduire que $d_3 f_0$ se décompose de manière unique via la projection d_2

6. Calculer le noyau de d_3, et montrer que $p' d_3$ se factorise via la projection p en une surjection de $coker(f_0)$ dans $coker(g)$.

7. Vérifier que $\ker(f_0) = \dfrac{P}{N(L^*)}$ et $\ker(g) = \dfrac{Q}{N(L^*) i(K_{\mathfrak{m},1})}$.

8. Montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\dfrac{K^*}{N(L^*)} \arrow[r, "f_0"] \arrow[d] & \dfrac{\mathbf{I}_K^{\mathfrak{m}}}{N(\mathbf{I}_L^{\mathfrak{m}})} \arrow[d] \\
\dfrac{K^*}{N(L^*) K_{\mathfrak{m},1}} \arrow[r, "g"] & \dfrac{\mathbf{I}_K^{\mathfrak{m}}}{N(\mathbf{I}_L^{\mathfrak{m}}) i(K_{\mathfrak{m},1})}
\end{tikzcd}$$

9. Justifier l'exactitude des suites lignes et colonnes du grand diagramme sur la page 49 (voir cours).

10. Justifier et préciser les conditions nécessaires pour l'affirmation : les groupes $\ker(g)$, $\dfrac{K^*}{N(L^*) K_{\mathfrak{m},1}}$, $\dfrac{\mathbf{I}_K^{\mathfrak{m}}}{N(\mathbf{I}_L^{\mathfrak{m}}) i(K_{\mathfrak{m},1})}$ et $coker(g)$ sont finis.

11. Montrer aussi que $\ker(f_0)$ et $coker(f_0)$ sont finis.

12. Soient les 2 morphismes $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Montrer que $\ker(g \circ f)/\ker(f) \simeq \mathrm{Im}(f) \cap \ker(g)$.

13. Posons $K = \mathbb{Q}$ et soit $L = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ une extension quadratique de K. Soit $\mathfrak{m}$ un module de K. Dans la suite, la notation (a) désigne l'idéal principal engendré par a, et p_∞ désigne le seul idéal premier infini de $\mathbb{Q}$.

    i. Quelles conditions doit satisfaire $\mathfrak{m}$ pour que $h_{\mathfrak{m}}(L/K) = [L : K] = 2$?

    ii. Pour $d = 2$, étudier la réalisation de l'égalité fondamentale dans les cas suivants : $\mathfrak{m} = (2)^5$, $\mathfrak{m} = (2)^2$, $\mathfrak{m} = (2)p_\infty$, $\mathfrak{m} = (2)^\ell p_\infty$ et $\mathfrak{m} = (3)(5)(7)^2(11)^8 p_\infty$, où ℓ est un entier naturel.

    iii. L'égalité $K_{\mathfrak{m},1} \cap i^{-1}(N(\mathbf{I}_L^{\mathfrak{m}})) = K_{\mathfrak{m},1} \cap N(L^*)$ est-elle réalisée dans les cas suivants ?

        a. $d = 6$, $\mathfrak{m} = (2)^3 p_\infty$, $\mathfrak{m} = (2)^3(3)^4 p_\infty$, $\mathfrak{m} = (2)^7(3)^3$ ou $\mathfrak{m} = (2)^3(3)^5(5)(7)^2(11)^8 p_\infty$.

        b. $d = -15$, $\mathfrak{m} = (3)(5)$ ou $\mathfrak{m} = (3)^3(5)^4(7)(13)p_\infty$.

14. Posons $K = \mathbb{Q}(\sqrt{30})$ et soit le corps biquadratique $L = \mathbb{Q}(\sqrt{30}, \sqrt{-1}) = \mathbb{Q}(\sqrt{30}, i)$ qui est une extension quadratique de K. Soit $\mathfrak{m}$ un module de K.

    i. Quels sont les idéaux de K qui se ramifient dans L ?

    ii. Préciser exactement les conditions que $\mathfrak{m}$ doit vérifier pour que $h_{\mathfrak{m}}(L/K) = [L : K] = 2$.

    iii. Donner des exemples de modules $\mathfrak{m}$ de K où l'égalité fondamentale est réalisée.

15. Posons $K = \mathbb{Q}$ et soit le corps quadratique $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Supposons que l'équation $(E) :\ x^2 - 3y^2 = 7$ admet une solution dans $\mathbb{Q}$. L'équation (E) admet-elle des solutions dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}_p$ pour chaque premier p de $\mathbb{N}$, où $\mathbb{Q}_p$ est le complété de $\mathbb{Q}$ en p ? Justifier.

À rendre avant le 24/08/2020.