Devoir 2 sur le chapitre 4

Préparé par : Pr. A. Zekhnini

Exercice 1 (Rappel sur la théorie des groupes)
Soit G un groupe et soit H un sous-groupe de G.

1. Rappeler la définition de l'indice $[G : H]$, est-il toujours défini ?
2. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que le quotient G/H soit un groupe ? Justifier.
3. Soit K un autre sous-groupe de G. L'indice $[G : HK]$ est-il toujours défini ? Sinon à quelle condition sera-t-il défini ?
4. Rappeler et démontrer les quatre théorèmes d'isomorphisme.

Exercice 2
Soit L/K une extension finie de degré n de corps de nombres. Notons par $\mathcal{O}_K$ et $\mathcal{O}_L$ les anneaux d'entiers de K et L respectivement. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de K.

1. Quel est le comportement de $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L$ l'étendu de $\mathfrak{p}$ à L (c-à-d étudier la ramification de $\mathfrak{p}$ dans L). Quelle loi obtient-on de ce comportement ? Justifier. Que devient cette loi si L/K est normale ?
2. Reprendre la question 1 si $\mathfrak{p}$ est un premier infini.
3. Si L/K est galoisienne de groupe de Galois G, quel est le type d'action de G sur l'ensemble des idéaux de L au dessus de $\mathfrak{p}$?
4. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de L au dessus de $\mathfrak{p}$. Notons par $K_\mathfrak{p}$ et $L_\mathfrak{P}$ les complétés de K et L en $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{P}$ respectivement.
   a. Étudier la ramification dans $L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}$.
   b. Soit $b \in L$, montrer que $N_{L/K}(b) = \prod_{i=1}^{g} N_{L_{\mathfrak{P}_i}/K_\mathfrak{p}}(b)$, où les $\mathfrak{P}_i$ sont les idéaux de L au dessus de $\mathfrak{p}$.

Exercice 3
Soit L/K une extension cyclique de corps de nombres de groupe de Galois $G = \langle\sigma\rangle$. Notons par $\mathcal{O}_K$ et $\mathcal{O}_L$ les anneaux d'entiers de K et L respectivement. Soient aussi $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ deux modules de K premier entre eux.

1. Montrer que $K_{\mathfrak{m},1} \cap K_{\mathfrak{n},1} = K_{\mathfrak{mn},1}$.
2. Montrer que l'application $g : K^* \longrightarrow \frac{K^*}{K_{\mathfrak{m},1}} \times \frac{K^*}{K_{\mathfrak{n},1}}$; $\alpha \longmapsto (\alpha K_{\mathfrak{m},1}, \alpha K_{\mathfrak{n},1})$ est surjective (vous pouvez utiliser le théorème d'approximation).
3. Justifier l'isomorphisme $\frac{K^*}{K_{\mathfrak{mn},1}} \simeq \frac{K^*}{K_{\mathfrak{m},1}} \times \frac{K^*}{K_{\mathfrak{n},1}}$.
4. Déduire que le morphisme composé suivant est surjectif avec $N = N_{L/K}$:
$$\varphi : \frac{K^*}{K_{\mathfrak{mn},1}} \longrightarrow \frac{K^*}{K_{\mathfrak{m},1}} \times \frac{K^*}{K_{\mathfrak{n},1}} \longrightarrow \frac{K^*}{N(L^*)K_{\mathfrak{m},1}} \times \frac{K^*}{N(L^*)K_{\mathfrak{n},1}}.$$
5. Considérons l'indice $a(\mathfrak{m}) = [K^* : N(L^*)K_{\mathfrak{m},1}]$.
   i. Justifier l'existence de $a(\mathfrak{m})$.
   ii. Soit $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ un premier infini de K. Montrer que $a(\mathfrak{p}) = e_\mathfrak{p}$ l'indice de ramification de $\mathfrak{p}$ (le cas ou $\mathfrak{p}$ est un premier infini réel ramifié dans L est déjà traité voir cours).
   iii. Soient $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}^\ell$, où $\mathfrak{p}$ est un premier fini de K, et $\ell \in \mathbb{N}^*$.
      a. Montrer que $K_\mathfrak{m}$ est le groupe des unités de l'anneau de valuation discrète $A_\mathfrak{p}$, le localisé de $\mathcal{O}_K$ en $\mathfrak{p}$
      b. Quel est l'idéal maximal M de $A_\mathfrak{p}$? Justifier.
      c. Soit π un des générateurs de M. Montrer que $\forall x \in K^*$, il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $u \in K_\mathfrak{m}$ tels que $x = \pi^a u$.

d. Montrer qu'il existe $f \in \mathbb{N}^*$ vérifiant : $\forall y \in N(L^*)$, il existe $b \in \mathbb{Z}$ et $v \in K_{\mathfrak{m}}$ tels que $y = \pi^{fb} v$.

e. Montrer que $\dfrac{K^*}{N(L^*)K_{\mathfrak{m}}} \simeq \dfrac{\langle \pi \rangle K_{\mathfrak{m}}}{\langle \pi^f \rangle K_{\mathfrak{m}}} \simeq \dfrac{\langle \pi \rangle}{\langle \pi^f \rangle}$.

f. Montrer que $\dfrac{K_{\mathfrak{m}}}{(K_{\mathfrak{m}} \cap N(L^*))K_{\mathfrak{m},1}} \simeq \dfrac{N(L^*)K_{\mathfrak{m}}}{N(L^*)K_{\mathfrak{m},1}}$.

iv. On garde l'hypothèse $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}^\ell$, où $\mathfrak{p}$ est un premier fini de K, et $\ell \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de L au dessus de $\mathfrak{p}$. Notons par $\widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ l'anneau de valuation de $K_{\mathfrak{p}}$, le complété de K en $\mathfrak{p}$, et par $U_{\mathfrak{p}}$ son groupe d'unités. Notons aussi par $U_{\mathfrak{P}}$ le groupe d'unités de l'anneau de valuation de $L_{\mathfrak{P}}$, le complété de L en $\mathfrak{P}$. Pour un entier naturel $n \in \mathbb{N}$, posons $U_{\mathfrak{p}}^{(n)} = 1 + \mathfrak{p}^n$.

a. Que représente $U_{\mathfrak{p}}^{(n)}$?

b. Montrer qu'il existe un morphisme surjectif de $K_{\mathfrak{m}}$ dans $\dfrac{U_{\mathfrak{p}}}{U_{\mathfrak{p}}^{(n)}}$.

c. Déduire l'existence d'un morphisme surjectif v de $K_{\mathfrak{m}}$ dans $\dfrac{U_{\mathfrak{p}}}{N_{\mathfrak{p}}(U_{\mathfrak{P}})U_{\mathfrak{p}}^{(n)}}$, où $N_{\mathfrak{p}} = N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}$.

d. Montrer que $K_{\mathfrak{m},1} \subset \ker(v)$ (ne pas utiliser le résultat du cours donnant $\ker(v)$).

e. En utilisant le théorème 90 de Hilbert, donner une démonstration détaillée des isomorphismes suivants avec $\Delta = 1 - \sigma$:

$$H^1(U_{\mathfrak{P}}) \simeq \frac{\Delta(L_{\mathfrak{P}}^*)}{\Delta(U_{\mathfrak{P}})} \simeq \frac{L_{\mathfrak{P}}^*}{K_{\mathfrak{p}}^* U_{\mathfrak{P}}}.$$

f. En utilisant les générateurs π et π_0 de l'idéal maximal de $A_{\mathfrak{p}}$ et de $\mathfrak{p}$ respectivement, montrer $\dfrac{L_{\mathfrak{P}}^*}{K_{\mathfrak{p}}^* U_{\mathfrak{P}}} \simeq \dfrac{\langle \pi \rangle}{\langle \pi^{e_{\mathfrak{P}}} \rangle}$. Déduire que $|H^1(U_{\mathfrak{P}})| = e_{\mathfrak{p}}$.

6. Posons $K = \mathbb{Q}$ et soit $L = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ une extension quadratique de K. Soit $\mathfrak{m}$ un module de K. Calculer $a(\mathfrak{m})$ dans les cas suivants (attention à la condition que $\mathfrak{m}$ doit satisfaire) :

a. $d > 0$, distinguer tous les cas possibles de $\mathfrak{m}$.

b. $d < 0$, distinguer tous les cas possibles de $\mathfrak{m}$.

À rendre dans trois semaines et demie,
c'est-à-dire avant le 19/07/2020.
Bon courage.